8

Trigonometría

8.1 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Trigonometría significa "medición de triángulos". Considere sus partes: *tri* significa "tres", *gono* significa "ángulo" y *metría* significa "medida". Así, en trigonometría se estudia la medida (o medición) de triángulos.

Las siguientes razones están relacionadas con los lados y los ángulos agudos de un triángulo rectángulo:

1. *Razón tangente*: La tangente (abreviatura "tan") de un ángulo agudo es igual a la longitud del cateto opuesto al ángulo dividida entre la longitud del cateto adyacente al ángulo.

2. *Razón seno*: El seno (abreviatura "sen") de un ángulo agudo es igual a la longitud del cateto opuesto al ángulo dividida entre la longitud de la hipotenusa.

3. *Razón coseno*: El coseno (abreviatura "cos") de un ángulo agudo es igual a la longitud del cateto adyacente al ángulo dividida entre la longitud de la hipotenusa.

Así, en el triángulo rectángulo *ABC* de la figura 8-1,

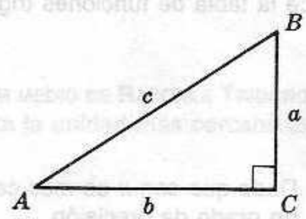


Fig. 8-1

$$\tan A = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } A}{\text{longitud del cateto opuesto adyacente a } A} = \frac{a}{b} \qquad \tan B = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } B}{\text{longitud del cateto adyacente a } B} = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{sen} A = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } A}{\text{longitud de la hipotenusa}} = \frac{a}{c} \qquad \operatorname{sen} B = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } B}{\text{longitud de la hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\cos A = \frac{\text{longitud del cateto adyacente a } A}{\text{longitud de la hipotenusa}} = \frac{b}{c} \qquad \cos B = \frac{\text{longitud del cateto adyacente a } B}{\text{longitud de la hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

Si *A* y *B* son los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo, se tiene que:

$$\operatorname{sen} A = \cos B \qquad \cos A = \operatorname{sen} B \qquad \tan A = \frac{1}{\tan B} \qquad \tan B = \frac{1}{\tan A}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

8.1 USO DE LA TABLA DE SENOS, COSENOS Y TANGENTES

Los siguientes valores fueron tomados de una tabla de senos, cosenos y tangentes. Exprese en forma de ecuación el significado de los valores en las tres primeras líneas. En seguida, utilice la tabla del final de este libro para completar la última línea

	Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
(*a*)	1°	0.0175	0.9998	0.0175
(*b*)	30°	0.5000	0.8660	0.5774
(*c*)	60°	0.8660	0.5000	1.7321
(*d*)	?	?	0.3420	?

Soluciones

(*a*) $\text{sen } 1° = 0.0175$; $\cos 1° = 0.9998$; $\tan 1° = 0.0175$

(*b*) $\text{sen } 30° = 0.5000$; $\cos 30° = 0.8660$; $\tan 30° = 0.5774$

(*c*) $\text{sen } 60° = 0.8660$; $\cos 60° = 0.5000$; $\tan 60° = 1.7321$

(*d*) En la tabla de funciones trigonométricas el número 0.3420 asociado al coseno está en la línea de 70°; por lo tanto,el ángulo buscado mide 70°. Finalmente, de la misma tabla se tiene que $\text{sen } 70° = 0.9397$ y que $\tan 70° = 2.7475$.

8.2 CÁLCULO DE LA MEDIDA DE UN ÁNGULO CON UN GRADO DE PRECISIÓN DADO

Calcule la medida de x, con una precisión máxima de la primera unidad en grados, si: (*a*) $\text{sen } x = 0.9235$; (*b*) $\cos x = \frac{21}{25}$ o 0.8400; (*c*) $\tan x = \sqrt{5}/10$ o 0.2236. Utilice la tabla de funciones trigonométricas.

Soluciones

		Diferencias	
(*a*)	$\text{sen } 68° = 0.9272$		
	$\text{sen } x = 0.9235$	→ 0.0037	Dado que sen x es más cercano a sen 67°, $m\angle x = 67°$ hasta un grado de precisión
	$\text{sen } 67° = 0.9205$	→ 0.0030	
(*b*)	$\cos 32° = 0.8480$	→ 0.0080	Dado que cos x es más cercano a cos 33°, $m\angle x = 33°$ con grado de precisión.
	$\cos x = 0.8400$		
	$\cos 33° = 0.8387$	→ 0.0013	
(*c*)	$\tan 13° = 0.2309$	→ 0.0073	Dado que tan x es más cercano a tan 13°, $m\angle x = 13°$ con grado de precisión
	$\tan x = 0.2236$		
	$\tan 12° = 0.2126$	→ 0.0110	

8.3 CÁLCULO DE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Para cada triángulo rectángulo en la figura 8-2, calcular las razones trigonométricas de los ángulos agudos.

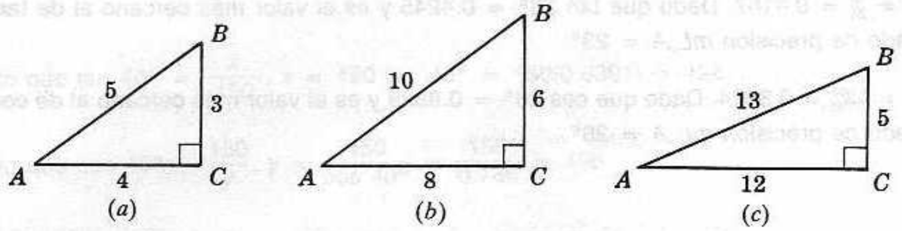


Fig.8-2

Soluciones

Fórmulas	(*a*) $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$	(*b*) $a = 6$, $b = 8$, $c = 10$	(*c*) $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$
$\tan A = \frac{a}{b}$	$\tan A = \frac{3}{4}$	$\tan A = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$	$\tan A = \frac{5}{12}$
$\tan B = \frac{b}{a}$	$\tan B = \frac{4}{3}$	$\tan B = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$	$\tan B = \frac{12}{5}$
$\operatorname{sen} A = \frac{a}{c}$	$\operatorname{sen} A = \frac{3}{5}$	$\operatorname{sen} A = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$	$\operatorname{sen} A = \frac{5}{13}$
$\operatorname{sen} B = \frac{b}{c}$	$\operatorname{sen} B = \frac{4}{5}$	$\operatorname{sen} B = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$	$\operatorname{sen} B = \frac{12}{13}$
$\cos A = \frac{b}{c}$	$\cos A = \frac{4}{5}$	$\cos A = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$	$\cos A = \frac{12}{13}$
$\cos B = \frac{a}{c}$	$\cos B = \frac{3}{5}$	$\cos B = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$	$\cos B = \frac{5}{13}$

.4 Cálculo de Medidas de Ángulos por medio de Razones Trigonométricas

Calcule la medida del ángulo *A*, hasta la unidad más cercana en grados, en cada inciso de la figura 8-3.

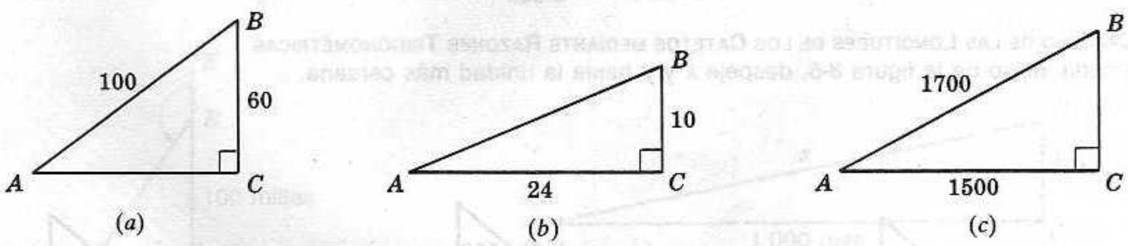


Fig. 8-3

Soluciones

(*a*) $\operatorname{sen} A = \frac{60}{100} = 0.6000$. Dado que $\operatorname{sen} 37° = 0.6018$, entonces si la precisión es hasta el grado más cercano, se tiene que $m\angle A = 37°$.

(*b*) $\tan A = \frac{10}{24} = 0.4167$. Dado que $\tan 23° = 0.4245$ y es el valor más cercano al de $\tan A$, entonces con un grado de precisión $m\angle A = 23°$.

(*c*) $\cos A = \frac{1\,500}{1\,700} = 0.8824$. Dado que $\cos 28° = 0.8829$ y es el valor más cercano al de $\cos A$, entonces con un grado de precisión $m\angle A = 28°$.

8.5 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE 30° Y 60°

Demuestre que:

(*a*) $\tan 30° = 0.577$ (*c*) $\cos 30° = 0.866$ (*e*) $\text{sen } 60° = 0.866$

(*b*) $\text{sen } 30° = 0.500$ (*d*) $\tan 60° = 1.732$ (*f*) $\cos 60° = 0.500$

Soluciones

Las razones trigonométricas para 30° y 60° pueden obtenerse usando un triángulo con ángulos 30°-60°-90° (Fig. 8-4); en un triángulo como éste, la razón de los lados es de $a{:}b{:}c = 1{:}\sqrt{3}{:}2$. Así:

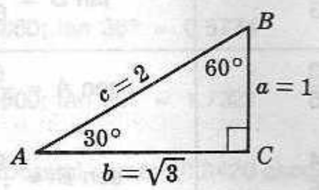


Fig. 8-4

(*a*) $\tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 0.577$

(*b*) $\text{sen } 30° = \dfrac{1}{2} = 0.500$

(*c*) $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$

(*d*) $\tan 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = 1.732$

(*e*) $\text{sen } 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$

(*f*) $\cos 60° = \dfrac{1}{2} = 0.500$

8.6 CÁLCULO DE LAS LONGITUDES DE LOS CATETOS MEDIANTE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

En cada inciso de la figura 8-5, despeje *x* y *y* hasta la unidad más cercana.

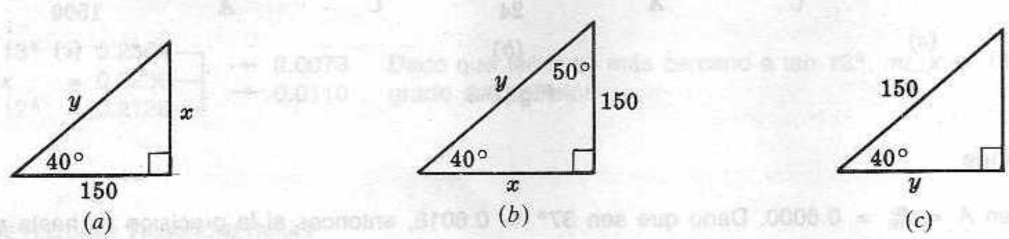


Fig. 8-5

Soluciones

(*a*) Dado que $\tan 40° = \frac{x}{150}$, $x = 150 \tan 40° = 150(0.8391) = 126$.

Dado que $\cos 40° = \frac{150}{y}$, $y = \frac{150}{\cos 40°} = \frac{150}{0.766} = 196$.

(*b*) Dado que $\tan 50° = \frac{x}{150}$, $x = 150 \tan 50° = 150(1.1198) = 179$.

Dado que $\operatorname{sen} 40° = \frac{150}{y}$, $y = \frac{150}{\operatorname{sen} 40°} = \frac{150}{0.6428} = 233$.

(*c*) Dado que $\operatorname{sen} 40° = \frac{x}{150}$, $x = 150 \operatorname{sen} 40° = 150(0.6428) = 96$.

Dado que $\cos 40° = \frac{y}{150}$, $y = 150 \cos 40° = 150(0.776) = 115$.

8.7 Resolución de Problemas Trigonométricos

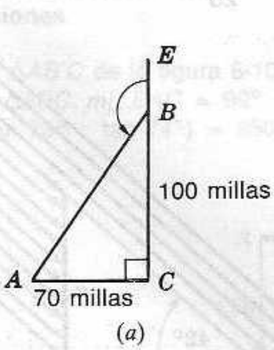
(*a*) Un piloto voló 70 millas al este de *A* hasta *C*. De *C* voló 100 millas al norte hasta *B*. Calcule la medida del ángulo del cambio de curso (hasta la unidad más cercana en grados) que debe hacerse en *B* para regresar a *A*.

(*b*) Se va a construir una carretera de manera que se eleve 105 pies por cada 1 000 pies de distancia horizontal. Calcule la medida del ángulo de elevación, hasta la unidad más cercana en grados, y la longitud de la carretera, hasta la unidad más cercana en pies, por cada 1 000 pies de distancia horizontal.*

Soluciones

(*a*) El ángulo requerido es $\angle EBA$ de la figura 8-6(*a*). En el triángulo rectángulo *ABC*. $\tan B = \frac{70}{100} = 0.7000$; por lo tanto $m\angle B = 35°$ y $m\angle EBA = 180° - 35° = 145°$.

(*b*) Es necesario calcular $m\angle A$ y x de la figura 8-6(*b*). Dado que $\tan A = \frac{105}{1000} = 0.1050$, $m\angle A = 6°$. Entonces $\cos 6° = \frac{1\,000}{x}$, por lo que $x = \frac{1\,000}{\cos 6°} = \frac{1\,000}{0.9945} = 1\,006$ pies.



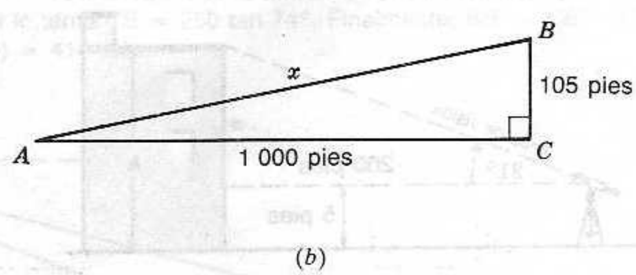


Fig. 8-6

*1 m = 3.281 pies; 1 milla = 1.6093 km.

8.2 ÁNGULO DE ELEVACIÓN Y DE DEPRESIÓN

A continuación se dan la definición y la terminología involucradas en problemas donde se determina experimentalmente un ángulo:

La *línea de visión* es la línea que va desde el ojo de un observador hasta el objeto de interés.

La *línea horizontal* es una línea paralela a la superficie del agua.

El *ángulo de elevación* (o de depresión) es un ángulo formado por la línea horizontal y la línea de visión localizada arriba (o abajo) de la línea horizontal, pero en el mismo plano vertical.

Así, en la figura 8-7 el observador divisa un aeroplano arriba de la horizontal y el ángulo formado por la horizontal y la línea de visión se denota como *ángulo de elevación*. Al apuntar al automóvil, el ángulo que forma la línea de visión con la horizontal es un *ángulo de depresión*.

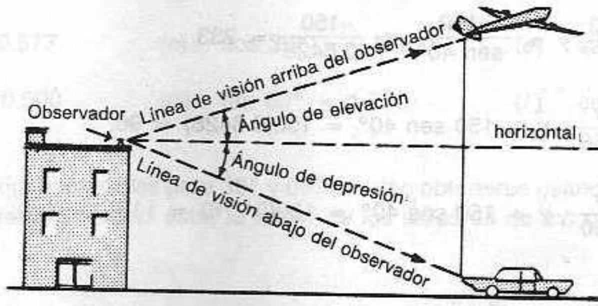


Fig. 8-7

PROBLEMAS RESUELTOS

8.8 PROBLEMAS CON ÁNGULOS DE ELEVACIÓN

(*a*) Al observar hacia el techo de un edificio, Enrique encuentra que el ángulo de elevación mide 21°. El piso está nivelado. El teodolito está 5 pies arriba del piso y a 200 pies del edificio. Calcule la altura del edificio con una precisión hasta la unidad más cercana en pies.

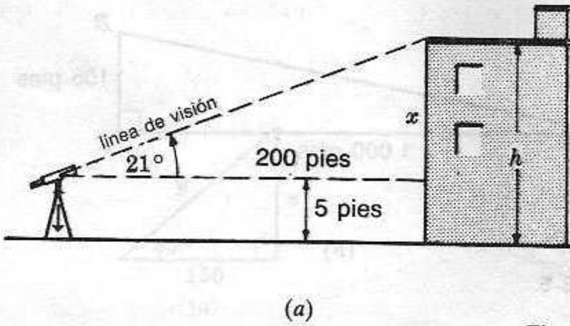
(*b*) Si el ángulo de elevación del Sol a una cierta hora es de 42°, calcule hasta la unidad más cercana en pies, la altura de un árbol cuya sombra mide 25 pies de longitud.

Soluciones

(*a*) Si x es la altura del edificio arriba del teodolito [Fig. 8-8(*a*)], entonces $\tan 21° = \dfrac{x}{200}$ y $x = 200 \tan 21°$, por lo tanto, $x = 200(0.3839) = 77$ pies.

Así, la altura del edificio es de $h = x + 5 = 77 + 5 = 82$ pies.

(*b*) Si h es la altura del árbol [Fig. 8-8(*b*)], entonces se tiene que $\tan 42° = \dfrac{h}{25}$, por lo que $h = 25 \tan 42° = 25(0.9004) = 23$ pies.



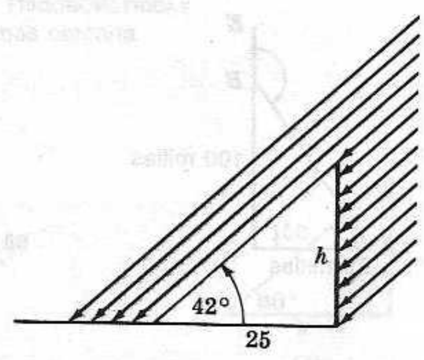


Fig. 8-8

8.9 PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN TANTO EL ÁNGULO DE ELEVACIÓN COMO EL DE DEPRESIÓN

Al estar de pie en la cima de un faro de 200 pies de altura, el guardafaros observó un avión y un barco. El ángulo de elevación del avión es de 25°; el ángulo de depresión del barco mide 32°. Calcule: (*a*) la distancia *d* del barco al pie del faro hasta la decena más cercana en pies; (*b*) la altura del avión sobre el agua con la misma precisión que en el inciso (*a*).

Soluciones

(*a*) Vea la figura 8-9. En el $\triangle$III, $\tan 58° = \dfrac{d}{200}$, por lo que $d = 220 \tan 58° = 200(1.6003) = 320$ pies.

(*b*) En el $\triangle$I, $\tan 25° = \dfrac{x}{920}$ por lo que $x = 320(0.4663) = 150$ pies.

Como la altura del faro es de 200 pies, la altura del avión es de $200 + 150 = 350$ pies.

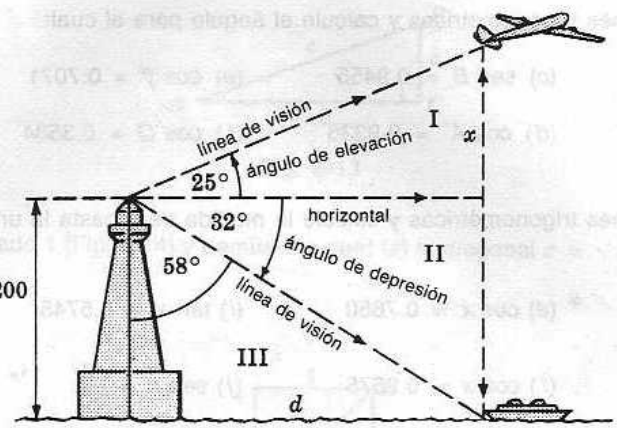


Fig. 8-9

8.10 PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN DOS ÁNGULOS DE DEPRESIÓN

Un observador en la cima de un montículo a 250 pies por encima de la superficie de un lago observa dos botes directamente en línea. Calcular, con una precisión de hasta las unidades en pies, la distancia entre los botes si los ángulos de depresión medidos por el observador son de 11° y 16° respectivamente.

Soluciones

En el $\triangle AB'C$ de la figura 8-10, $m\angle B'AC = 90° - 11° = 79°$. Por lo tanto $CB' = 250 \tan 79°$.
En el $\triangle ABC$, $m\angle BAC = 90° - 16° = 74°$. Por lo tanto $CB = 250 \tan 74°$. Finalmente, $BB' = CB' - CB = 250(\tan 79° - \tan 74°) = 250(5.1446 - 3.4874) = 414$ pies.

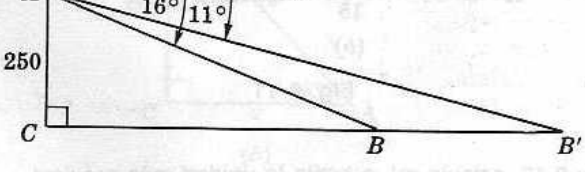


Fig. 8-10

Problemas complementarios

1. Utilice la tabla de funciones trigonométricas y calcule: (8.1)

   (*a*) sen 25°, sen 48°, sen 59° y sen 89°

   (*b*) cos 15°, cos 52°, cos 74° y cos 88°

   (*c*) tan 4°, tan 34°, tan 55° y tan 87°

   (*d*) ¿Qué razones trigonométricas son crecientes si la medida de un ángulo se incrementa de 0° a 90°?

   (*e*) ¿Qué razones trigonométricas son decrecientes si la medida de un ángulo se incrementa de 0° a 90°?

   (*f*) ¿Qué razón trigonométrica tiene valores mayores que 1?

2. Utilice la tabla de funciones trigonométricas y calcule el ángulo para el cual: (8.1)

   (*a*) sen $x = 0.3420$ (*c*) sen $B = 0.9455$ (*e*) cos $y = 0.7071$ (*g*) tan $W = 0.3443$

   (*b*) sen $A = 0.4848$ (*d*) cos $A' = 0.9336$ (*f*) cos $Q = 0.3584$ (*h*) tan $B' = 2.3559$

3. Utilice la tabla de funciones trigonométricas y calcule la medida de x hasta la unidad más cercana en grados si: (8.2)

   (*a*) sen $x = 0.4400$ (*e*) cos $x = 0.7650$ (*i*) tan $x = 5.5745$ (*m*) cos $x = \frac{3}{8}$

   (*b*) sen $x = 0.7280$ (*f*) cos $x = 0.2675$ (*j*) sen $x = \frac{11}{50}$ (*n*) cos $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

   (*c*) sen $x = 0.9365$ (*g*) tan $x = 0.1245$ (*k*) sen $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (*o*) tan $x = \frac{2}{7}$

   (*d*) cos $x = 0.9900$ (*h*) tan $x = 0.5200$ (*l*) cos $x = \frac{13}{25}$ (*p*) tan $x = \frac{\sqrt{3}}{10}$

4. En cada triángulo de la figura 8-11, calcule sen A, cos A, tan A. (8.3)

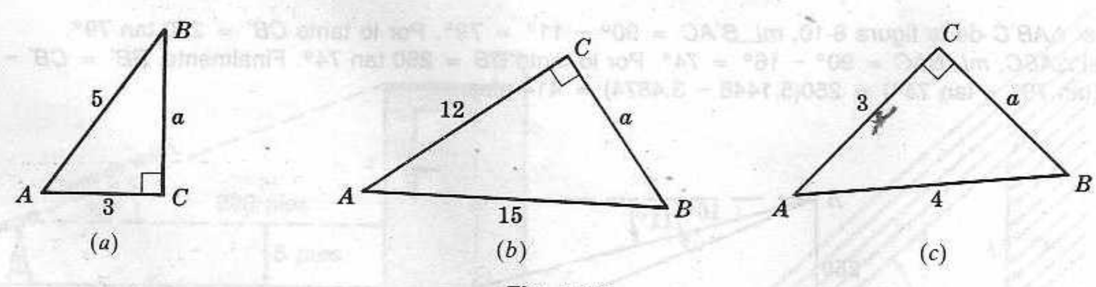


Fig. 8-11

5. En cada inciso de la figura 8-12, calcule $m\angle a$ hasta la unidad más próxima. (8.4)

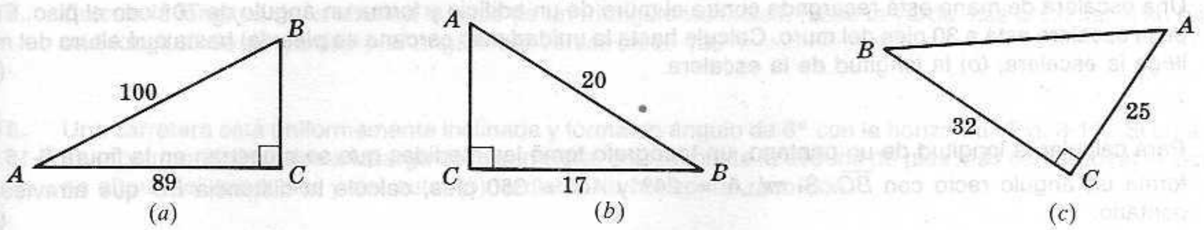


Fig. 8-12

6. En la figura 8-13, calcule $m\angle B$ hasta la unidad más próxima si (*a*) $b = 67$ y $c = 100$; (*b*) $a = 14$ y $c = 50$; (*c*) $a = 22$ y $b = 55$; (*d*) $a = 3$ y $b = \sqrt{3}$ (8.4)

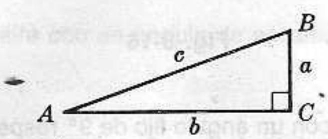


Fig. 8-13

7. Utilice un cuadrado de lado 1 (Fig. 8-14) y demuestre que: (*a*) la diagonal $c = \sqrt{2}$; (*b*) $\tan 45° = 1$; (*c*) sen $45° = \cos 45° = 0.707$ (8.5)

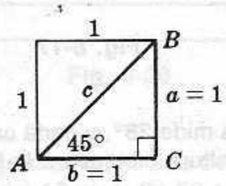


Fig. 8-14

8. Calcule todos los ángulos agudos de cualquiera de los triángulos rectángulos cuyos lados están en proporciones de: (*a*) 5:12:13; (*b*) 8:15:17; (*c*) 7:24:25; (*d*) 11:60:61; hasta la unidad más cercana en grados. (8.5)

9. En cada triángulo de la figura 8-15, despeje *x* y *y* hasta la unidad más cercana en grados. (8.5)

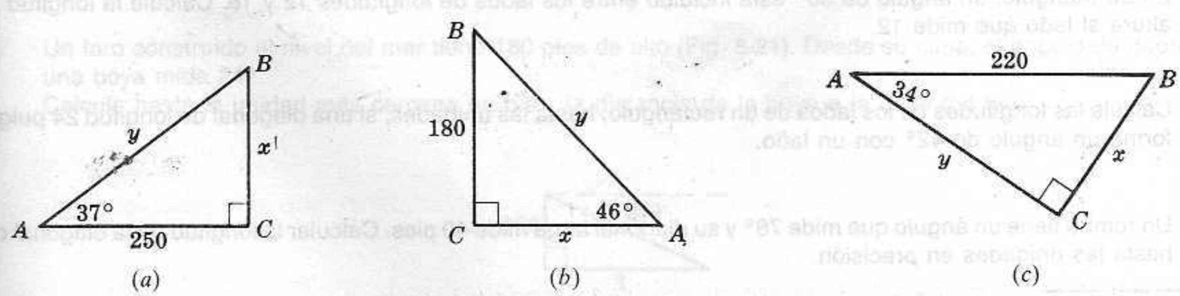


Fig. 8-15

10. Una escalera de mano está recargada contra el muro de un edificio y forma un ángulo de 70° con el piso. El pie de la escalera está a 30 pies del muro. Calcule hasta la unidad más cercana en pies: (*a*) hasta qué altura del muro llega la escalera; (*b*) la longitud de la escalera. (8.6)

11. Para calcular la longitud de un pantano, un topógrafo tomó las medidas que se muestran en la figura 8-16. $\overline{AC}$ forma un ángulo recto con $\overline{BC}$. Si $m\angle A = 24°$ y $AC = 350$ pies, calcule la distancia BC que atraviesa al pantano. (8.6)

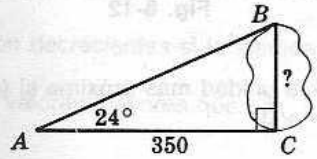


Fig. 8-16

12. Un avión se eleva al despegar y vuela con un ángulo fijo de 9° respecto al suelo (Fig. 8-17). Cuando ha llegado a 400 pies de altura, calcule hasta la primera decena: (*a*) la distancia horizontal que ha recorrido; (*b*) la distancia que efectivamente ha recorrido el avión. (8.6)

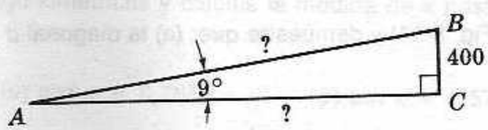


Fig. 8-17

13. El ángulo base de un triángulo isósceles mide 28°, y cada cateto mide 45 pulgadas* (Fig. 8-18). Calcule, hasta la primera unidad: (*a*) la longitud de la altura dibujada a la base; la longitud de la base. (8.6)

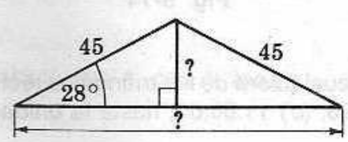


Fig. 8-18

14. En un triángulo, un ángulo de 50° está incluido entre los lados de longitudes 12 y 18. Calcule la longitud de la altura al lado que mide 12. (8.6)

15. Calcule las longitudes de los lados de un rectángulo, hasta las unidades, si una diagonal de longitud 24 pulgadas forma un ángulo de 42° con un lado. (8.6)

16. Un rombo tiene un ángulo que mide 76° y su diagonal larga mide 40 pies. Calcular la longitud de la diagonal corta hasta las unidades en precisión. (8.6)

*1 pulgada = 2.54 cm.

17. Calcule la longitud de la altura a la base de un triángulo isósceles, hasta la yarda más próxima, si su base tiene una longitud de 40 yardas y el ángulo del vértice mide 106°. (8.6)

18. Una carretera está uniformemente inclinada y forma un ángulo de 6° con la horizontal (Fig. 8-19). Si un automóvil ha recorrido 10 000 pies a lo largo de la carretera, calcule hasta la decena de pies más cercana: (*a*) el incremento en altura del conductor y del auto; (*b*) la distancia horizontal recorrida. (8.7)

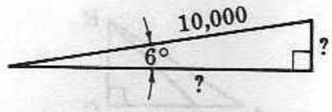


Fig. 8-19

19. Un avión viaja 15 000 pies en el aire con un ángulo de escalada uniforme, ganando así 19 000 pies de altura. Calcule el ángulo de escalada. (8.7)

20. Al divisar la cima de un monumento, Guillermo encontró que el ángulo de elevación era de 16° (Fig. 8-20). El piso está nivelado y el teodolito está 5 pies arriba del piso. Si el monumento tiene 86 pies de alto, calcule la distancia entre Guillermo y la base del monumento. (8.8)

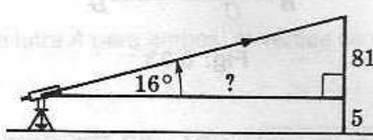


Fig. 8-20

21. Calcule hasta la unidad más cercana en grados, la medida del ángulo de elevación del Sol cuando un árbol de 60 pies de alto proyecta una sombra de: (*a*) 10 pies; (*b*) 60 pies. (8.8)

22. A cierta hora del día, el ángulo de elevación del Sol mide 34°. Calcule hasta la unidad más cercana en pies, la longitud de la sombra proyectada por: (*a*) un asta de 15 pies; (*b*) un edificio de 70 pies de alto. (8.8)

23. Una luz en *C* se proyecta verticalmente hasta una nube *B*. Un observador en *A*, a una distancia horizontal de *C* de 1 000 pies determina el ángulo de elevación de *B*. Calcule la altura de la nube, hasta la unidad más cercana en pies, si $m\angle A = 37°$. (8.8)

24. Un faro construido al nivel del mar tiene 180 pies de alto (Fig. 8-21). Desde su cima, el ángulo de depresión de una boya mide 24°.
Calcule hasta la unidad más cercana en pies, la distancia de la boya a la base del faro. (8.8)

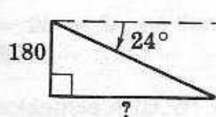


Fig. 8-21

25. Un observador en la cima de un monte a 300 pies sobre el nivel de un lago, divisa dos barcos directamente en línea. Calcule, hasta la unidad más cercana en pies, la distancia entre los barcos si los ángulos de depresión determinados por el observador son: (*a*) 20° y 15°; (*b*) 35° y 24°; (*c*) 9° y 6°. (8.10)

26. En la figura 8-22, $m\angle A = 43°$, $m\angle BDC = 54°$, $m\angle C = 90°$ y $DC = 170$ pies. (*a*) Calcule la longitud de $\overline{BC}$; (*b*) del resultado del inciso (*a*) calcule la longitud de $\overline{AB}$. (8.10)

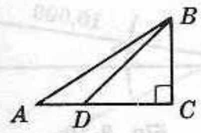


Fig. 8-22

27. En la figura 8-23, $m\angle B = 90°$, $m\angle ACB = 58°$, $m\angle D = 23°$ y $BC = 60$ pies. (*a*) Calcule la longitud de $\overline{AB}$; (*b*) del resultado del inciso (*a*) calcule la longitud de $\overline{CD}$. (8.10)

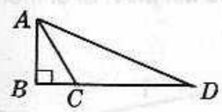


Fig. 8-23

28. Desde un punto externo P se dibujan las tangentes $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ a un círculo. $m\angle APB = 40°$ y $PA = 25$. (*a*) Calcule, hasta la décima más cercana, el radio del círculo. (*b*) Calcule, hasta la unidad más cercana, la longitud del arco menor $\widehat{AB}$.